دکتر محرم‌نژاد ایردموسی، عضو هیئت علمی دانشگاه شهید بهشتی

اشاره

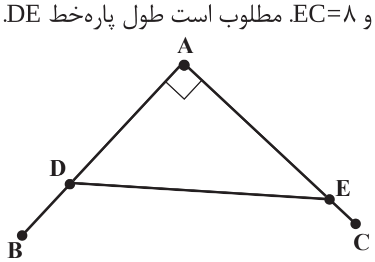
«پای تخته» عنوان بخش ثابتی در «ماه‌نامهٔ برهان» است که از دو بخش داخلی «مسئله‌ها» و «راه‌حل‌ها» تشکیل شده است. در هر شماره از ماه‌نامه، ۱۰ مسئلهٔ جدید مطرح می‌شود که همهٔ خوانندگان را به چالش می‌طلبد. توصیه می‌کنیم که به‌طور فعال به حل آن‌ها بپردازید و راه‌حل‌های خود را برای انعکاس در ماه‌نامه برایمان بفرستید تا با نام خودتان در شماره‌های بعد چاپ شود. از طراحان مسائل ریاضی نیز می‌خواهیم، مسائل جدید خود را برای طرح در بخش مسئله‌ها برایمان بفرستند. توجه داشته باشید که مسائل جدید باید همراه با حل (یا راه‌حل‌های) آن‌ها و در صورت امکان با ذکر مأخذ باشد.

مسائل و راه‌حل‌های خود را می‌توانید یا از طریق پستی (به آدرس ماه‌نامه) و یا از طریق پست الکترونیکی برایمان بفرستید که طریقهٔ دوم سریع‌تر و بهتر خواهد بود. در صورتی که خواستید از طریق پست الکترونیکی اقدام کنید، صفحات نوشته‌های خود را اسکن (با وضوح حداقل ۱۵۰dpi) یا تایپ کنید و بفرستید. در پایان هر سال اسامی نفرات برتر در ماه‌نامه درج خواهد شد و به بهترین‌ها جوایز نفیسی اهدا می‌شود.

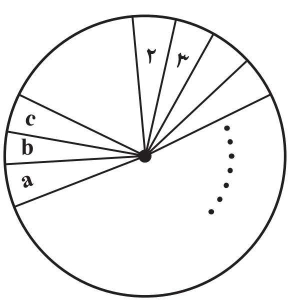
بخش اول: مسئله‌ها

۲۴۱. همهٔ مقادیر حقیقی a را بیابید، به‌طوری که منحنی دو تابع با ضابطه‌های $y=ax^2-x-4$ و $y=x^3-x^2+3x-4$ دقیقاً در دو نقطه یکدیگر را قطع کنند.

۲۴۲. در شکل زیر $DB=9$، $\angle CAB=90^\circ$، $AB=AC=DE$ و $EC=8$. مطلوب است طول پاره‌خط DE.

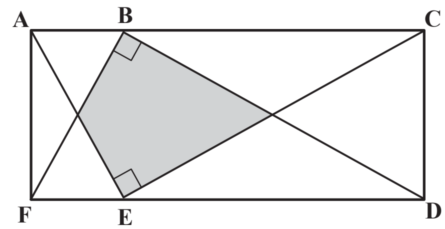


۲۴۳. دایره‌ای را به ۳۶ قسمت مساوی مانند شکل تقسیم کرده‌ایم و در هر قسمت یک عدد صحیح نوشته‌ایم. به‌طوری که برای هر سه عدد متوالی b، a و c داریم: $b=ac$. اگر دو عدد ابتدایی، ۲ و ۳ باشند، حاصل جمع همهٔ اعداد را بیابید.



۲۴۴. در مستطیل ACDF، $CD=50$، $AC=200$ و دو مثلث قائم‌الزاویه AEC و FBD همنهشت

هستند. مساحت قسمت هاشورخورده را به‌دست آورید.



۲۴۵. در تصاعد حسابی $a_۱,a_۲,a_۳,...$، داریم: $a_۱\neq a_۲$ و سه جملهٔ $a_۱$، $a_۲$ و $a_۶$ نیز یک تصاعد هندسی تشکیل داده‌اند. همهٔ مقادیر k را بیابید، به‌طوری که سه جملهٔ $a_۱$، $a_۴$ و a_k (با همین ترتیب) یک تصاعد هندسی تشکیل دهند.

۲۴۶. یک سهمی محور xها را در نقاط $P(۲,۰)$ و $Q(۸,۰)$ قطع می‌کند و رأس سهمی (V) زیر محور xها قرار دارد. اگر مساحت مثلث VPQ برابر ۱۲ باشد، مختصات V را بیابید.

۲۴۷. مجموع شعاع‌های دو دایره برابر است با ۱۰ و محیط آن‌ها اختلافی برابر ۳ دارد. اختلاف مساحت دو دایره را به‌دست آورید.

۲۴۸. تابع f به این صورت تعریف شده است که اگر n زوج باشد، $f(n)$ برابر است با: $n^۲-۱$ و اگر n فرد باشد، $f(n)$ برابر است با: $n-۱$. همهٔ اعداد صحیح n را بیابید به‌طوری که:

$$f(f(n))=۳$$

۲۴۹. A، B و C سه مجموعه هستند، به‌طوری که: $A-B=B-C=C-A$. ثابت کنید: $A=B=C$.

۲۵۰. پنج نقطه روی کره‌ای مفروض هستند. ثابت کنید نیم‌کره‌ای بسته شامل حداقل چهار نقطه از آن پنج نقطه وجود دارد. (نیم‌کره‌ای را که شامل مرز خود باشد، نیم‌کرهٔ بسته می‌نامیم. مرز هر نیم‌کره یک دایرهٔ عظیمه است.)

بخش دوم:
راه حل‌ها

۲۱۱. اگر همهٔ اعداد ۱ تا ۱۰۰ را پشت‌سر هم بنویسیم، چند رقم زوج و چند رقم فرد نوشته خواهد شد؟

بین یک رقمی‌ها، ۴ رقم زوج و ۵ رقم فرد وجود دارد. بین اعداد دو رقمی در جایگاه یکان ۴۵ رقم زوج، و ۴۵ رقم فرد وجود دارد، اما در جایگاه دهگان ۵۰ رقم فرد و ۴۰ رقم زوج وجود دارد. در نتیجه در مجموع ۹۱ رقم زوج و ۱۰۱ رقم فرد وجود دارد.

۲۱۲. مکعبی به ضلع $\frac{۲}{۳}m$ را روی مکعبی به ضلع 1m قرار داده‌ایم و سطح بیرونی حجم حاصل را رنگ کرده‌ایم. سطح رنگ شده چه مساحتی دارد؟

از دو مکعب، مربعی به ضلع $\frac{۲}{۳}m$ رنگ شده است. پس مساحت سطح رنگی برابر است با:

$$S=۶\times ۱^۲+۶\times(\frac{۲}{۳})^۲-۲\times(\frac{۲}{۳})^۲=\frac{۳۸}{۹}m^۲$$

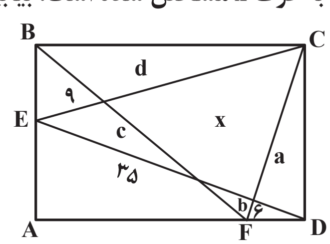
۲۱۳. رقم یک در عدد $۲^{۲۰۰۹}$ چندبار ظاهر می‌شود؟

۶۴ رقم یک دارد!

۲۱۴. شش سخنران در سمیناری سخنرانی خواهند کرد. می‌خواستیم ترتیب سخنرانی‌ها را طوری انتخاب کنیم که سخنران A قبل از سخنران B و سخنران B قبل از سخنران C صحبت کنند. چند جور می‌توان برنامهٔ سخنرانی‌ها را تنظیم کرد؟

ترتیب‌های ممکن برای سه سخنران A، B و C برابر است با: $۳!=۶$. این شش حالت به‌دلیل تقارن تعداد یکسانی دارند و در نتیجه پاسخ مسئله برابر است با: $\frac{۶!}{۶}=۱۲۰$. به عبارت دیگر، اگر در صورت مسئله جای A، B و C را تغییر دهیم، پاسخ مسئله تغییر نمی‌کند. در نتیجه در $\frac{۶!}{۶}$ حالت، A قبل از B و B قبل از C سخنرانی خواهند کرد.

۲۱۵. در شکل پاره‌خط‌های DE، CE، BF و CF مستطیل را به ناحیه‌های کوچک‌تر افراز کرده‌اند که مساحت سه‌تا از ناحیه‌ها در شکل مشخص شده است. مساحت ناحیه‌ای را که با حرف x مشخص شده است، بیابید.



با نام‌گذاری مســاحت‌های مجهول مطابق شــکل و نوشــتن مســاحت مثلث‌های DEC و BFC خواهیم داشت:

$$a+c+x=\frac{۱}{۲}S_{ABCD}=b+d+x$$

در نتیجه: a+c=b+d. از طرف دیگر:

$a+b+c+d+x+۳۵+۶+۹=S_{ABCD}$

در نتیجه: x=۵۰.

۲۱۶. در چند جایگشــت از اعداد ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ و ۶، حاصل‌ضرب هر دو عدد مجاور زوج است؟

در واقع اعداد فرد نباید مجاور باشند. ابتدا رقم‌های زوج را بــه !۳ طریق می‌نویســیم. ســپس ۳ رقم فرد را در لابــه‌لای آن‌ها (۴ مکان) قــرار می‌دهیم (به ۲×۳×۴ طریــق). در نتیجه تعداد جایگشــت‌های مطلوب برابر است با: ۱۴۴=!۴!۳.

۲۱۷. عدد پنج‌رقمی $\overline{abcde}$ مفروض اســت. ثابت کنید این عدد مضرب ۷ اســت اگر و تنها اگر عدد $\overline{abcd}-۲\times e$ مضرب ۷ باشد.

بــا فرض $x=\overline{abcd}$، حکم مســئله به این صورت خواهد شــد: «۱۰x+e مضرب ۷ اســت، اگر و تنها اگر x-۲e مضرب ۷ باشــد.» تســاوی زیر حکــم را نتیجه می‌دهد:

$۲(۱۰x+e)+(x-۲e)=۲۱x$

۲۱۸. همهٔ اعداد حقیقــی x را بیابید، به‌طوری که: $\left[\frac{۱}{x}\right]+\left[\frac{۳}{x}\right]=۴$. ([x] همــان جزءصحیــح x است.)

اگــر x منفــی باشــد، طــرف اول منفی اســت و معادلــه جواب نــدارد. اگــر x>۱ آن‌گاه: $\frac{۱}{x}+\frac{۳}{x}<۴$ و در نتیجــه: $[\frac{۱}{x}]+[\frac{۳}{x}]<۴$ و معادلــه جــواب ندارد. پــس: ۱≥x>۰. با فرض: $\frac{۳}{۴}<x\le ۱$ خواهیم داشــت: $[\frac{۱}{x}]+[\frac{۳}{x}]=۱+۳=۴$. در بــازه $۰<x\le\frac{۳}{۴}$، طــرف اول از ۴ بیشــتر خواهد شــد و معادله جواب ندارد. در نتیجه پاسخ مسئله بازهٔ $(\frac{۳}{۴},۱]$ خواهد بود.

۲۱۹. ثابت کنید:

$$\frac{۱\times۲}{۲}+\frac{۲\times۳}{۲}+\frac{۳\times۴}{۲}+...+\frac{n(n+۱)}{۲}=\frac{n(n+۱)(n+۲)}{۶}$$

راه‌حل‌های متفاوتی برای اثبات این تســاوی وجود دارد. راه‌حل زیر یک راه‌حل ترکیبیاتی است. فرض کنید می‌خواهید از مجموعهٔ {۱,۲,...,n+۲} یک زیرمجموعهٔ ســه عضوی انتخاب کنید. $\binom{n+۲}{۳}$ انتخاب برای این زیرمجموعه وجود دارد که برابر است با: $\frac{(n+۲)(n+۱)n}{۶}$.

بزرگ‌ترین عضــو این زیرمجموعه می‌تواند عددی از ۳ تا n+۲ باشد. اگر بزرگ‌ترین عضو این زیرمجموعه برابر n+۲ باشــد، برای دو عضو دیگر $\binom{n+۱}{۲}$ انتخاب، اگر برابــر n+۱ باشــد، برای دو عضو دیگــر $\binom{n}{۲}$، ...، و اگر برابر ۳ باشــد، برای دو عضــو دیگر $\binom{۲}{۲}$ انتخاب وجود دارد. در نتیجه:

$$\binom{۲}{۲}+\binom{۳}{۲}+...+\binom{n+۱}{۲}=\binom{n+۲}{۳}$$

و می‌دانیم $\binom{k}{۲}=\frac{k(k-۱)}{۲}$ بنابراین:

$$\frac{۱\times۲}{۲}+\frac{۲\times۳}{۲}+...+\frac{n(n+۱)}{۲}=\frac{n(n+۱)(n+۲)}{۶}$$

۲۲۰. روی ۲۰۰۹ کارت اعــداد طبیعــی متفاوتــی نوشــته شــده‌اند، به‌طوری که مجموع آن‌ها برابر است با: ۲۰۲۰۰۴۹. عدد وسط چه عددی است؟

مجموع اعداد ۱ تا ۲۰۰۹ برابر است با: ۲۰۱۹۰۴۵. اگر یکــی از اعداد ۱ تا ۱۰۰۵ مانند x در میان کارت‌ها نباشــد، حاصل جمع اعداد روی کارت‌هــا حداقل برابر است با:

$$S=۱+۲+...+۲۰۰۹-x+۲۰۱۰$$
$$=\frac{۲۰۱۰\times۲۰۱۱}{۲}-x=۲۰۲۱۰۵۵-x$$

چــون: x≤۱۰۰۵، پس: S≥۲۰۲۱۰۵۰ که با فرض مسئله تناقض دارد. پس اعداد ۱ تا ۱۰۰۵ در میان اعداد کارت‌ها خواهند بود. در نتیجه عدد وســط حتماً ۱۰۰۵ خواهد شد.